

الرياضيات بين التطور والأهمية

-٢-

للمستاذ

بجدي محمود عزت
معيد الرياضيات العالي

قال تعالى : « قل هل يستوي الذين يعلمون والذين لا يعلمون إنما يتذكر أولى الألباب » صدق الله العظيم .

بيننا في المقالة السابقة تاريخ الرياضيات وتطورها وأنها أصبحت شيئاً لازماً حتى هؤلاء الذين لا ينتمون لتخصص معين ، وبيننا قيمة مفهوم المجموعة والعلاقة وأنها يلعبان دوراً هاماً في الرياضيات المعاصرة وتقدم نظرية المجموعات أو الفئات التي تتناول بسط هذين المفهومين وما يتصل بهما من مفاهيم وقضايا متنوعة وأدوات فعالة وأساليب ناجحة للدراسة أي موضوع من الموضوعات الرياضية .

وتحدر نظرية المجموعات أو الفئات من أهم ما كشف العقل البشري في الرياضيات وقد أسس هذه النظرية جورج كانتور (١٨٥٤-١٩١٨ م) العالم الرياضي المعروف .

لا ترجع أهمية نظرية الفئات إلى مجرد أنها إضافة إلى مجال الرياضيات فحسب بل أنها علاوة على ذلك أمدت الرياضيين بأسس وأساليب جديدة لمعالجة فروع الرياضيات المختلفة التي كانت قائمة كما أتاحت الفرصة لكشف كثير من الفروع الحديثة ولقد ساعدت لغة

ورموز وجبر نظرية الفئات في دراسة هندسة إقليدس وجبر الأعداد ونظرية الدوال الحقيقية كما أنها أصبحت أداة رئيسية في دراسة المنطق والجبر البولي والجبر المجرد والهندسات المختلفة والتوبولوجي .

ومفهوم المجموعة من البساطة بحيث يمكن إدراكه بسهولة من خلال كثير من المواقف التي يصادفها كل منا في حياته اليومية فعند الحديث مثلاً عن حزمه أقلام ، باقة من الأزهار ندرك أننا أمام شيء مكون من عدة أفراد وقد إصطلح علمياً على تسمية هذا الشيء مجموعة (Set) .

عناصر مجموعة :

لقد إصطلح على تسمية كل فرد من أفراد المجموعة عنصر Element وسرمز للمجموعات بحروف كبيرة مثل سـ ، صـ ، عـ ...

ولعناصر مجموعة بأحرف صغيرة مثل أ ، ب ، ح ، ... ، س ، ص ، ...

طرق تعيين مجموعة :

١ - تتعين مجموعة إذا عرفت جميع عناصرها ويمكننا عندئذ كتابة المجموعة بذكر جميع عناصرها بين حاضنتين من الشكل { } مع وضع فاصلة بين كل عنصرين فإذا رمزنا لمجموعة حروف كلمة إنسان مثلاً بـ سـ فإننا نكتب :

$$سـ = \{ أ ، ن ، سـ \} .$$

٢ - تتعين المجموعة أيضاً بذكر خاصة يمكن بواسطتها الحكم على أي شيء بأنه عنصر في هذه المجموعة أو أنه غريب عنها وفي هذه الحالة

نرمز لعنصر كفي مثل ع الذي نسميه (متحولاً Variable) في المجموعة ونعبر عن المجموعة بذكر الخاصة التي يتمتع بها المتحول ع أي الخاصة المميزة التي تتمتع بها جميع عناصر المجموعة المذكورة فالمجموعة سـ السابقة الذكر تكتب بالشكل :

$$س = ع : ع \text{ حرف من حروف كلمة إلسان}$$

وتقرأ سـ هي مجموعة العناصر ع حيث ع حرف من حروف كلمة إلسان وقد استخدمنا : عوضاً عن كلمة حيث

مثال : إذا فرضنا أن س مجموعة الأعداد الصحيحة التي تصغر العدد ٦ فيمكننا أن نكتب :

$$س = ١ ، ٣ ، ٣ ، ٤ ، ٥$$

$$\text{أو } س = ن : ن \text{ عدد صحيح موجب } > ٦$$

المجموعات العددية :

إن أكثر المجموعات تداولاً في الدراسات الرياضية هي المجموعات العددية وسنذكر بعضاً منها :

١ - مجموعة الأعداد الطبيعية :

$$ط = [٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، \dots]$$

٢ - مجموعة الأعداد الطبيعية المغايرة للصفر .

$$ط = [١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، \dots]$$

٣- مجموعة الأعداد الصحيحة :

$$\text{ص} = [\dots , 3 , 2 , 1 , 0 , 1 , 2 , 3 , \dots]$$

٤- مجموعة الأعداد الصحيحة المغايرة للصفر

$$\text{ص}^* = [\dots , 3 , 2 , 1 , 1 , 2 , 3 , \dots]$$

٥- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر :

$$\text{ص}^+ = [\dots , 23 , 2 , 1 , 0]$$

٦- مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر .

$$\text{ص}^- = [\dots , 3 , 2 , 1 , 0]$$

وهناك أنواع أخرى من المجموعات العددية .

مفهوم الانتماء :

إذا كان b عنصر في المجموعة S فإننا نقول أن b ينتمي إلى S ونكتب ذلك بالشكل $b \in S$ وقرأ أن تنتمي إلى S وإذا أردنا نفي انتماء b إلى المجموعة S كتبنا $b \notin S$ وقرأ b لا تنتمي إلى S .

مثال : إذا كانت $S = [\text{س} : \text{عدد طبيعي زوجي}]$ فإن :

$$8 \in S , 4 \notin S$$

مثال : إذا علمنا أن S مجموعة الأعداد الصحيحة وأن ص^+

مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة والصفر وأن ص - مجموعة الأعداد الصحيحة السالبة والصفر فإنه يكون :

$$3 \text{ ص} + , 3 \text{ ص} - , 5 \text{ ص} \neq + .$$

المجموعة الخالية : Empty Set

إذا عينا مجموعة بخاصة معينة ووجدنا أنه لا يوجد أي عنصر يتمتع بهذه الخاصة فإننا نقول أن هذه المجموعة خالية ونعطيها الرمز \emptyset أو الرمز $\{ \}$.

مثال : إن مجموعة الأعداد الطبيعية التي تكبر العدد ٢ وتصغر العدد ٣ هي مجموعة خالية لأنه لا يوجد بين العددين ٢ ، ٣ أي عدد طبيعي أي $\emptyset = \{ \text{س} : \text{س} \sim \neq \text{ط} , 2 < \text{س} < 3 \}$.

المجموعات المنتهية والمجموعات غير المنتهية :

Finite and Unfinite Sets

إن المجموعة $\text{س} = \{ \text{أ} , \text{ب} , \text{ج} , \text{د} \}$ عناصر أربعة في حين أن مجموعة الأعداد الطبيعية .

$\text{ط} = \{ . , 1 , 2 , 3 , . . . \}$ لا يمكن الانتهاء من عد عناصرها .

تسمى كل مجموعة يمكن الانتهاء من عد عناصرها ولو نظرياً مجموعة منتهية وتقول في الحالة المخالفة أننا أمام مجموعة غير منتهية .

مثال ١ - مجموعة الأعداد الطبيعية التي تصغر العدد ٢٠ مجموعة منتهية .

٢ - مجموعة الأعداد الطبيعية الزوجية غير منتهية .

تساوي مجموعتين :

يقال لفتين S ، V أنهما متساويتان إذا كانتا تتكونان من نفس العناصر بالضبط أي أن الفتين $S=V$. V تكونان متساويتان إذا كانتا مجرد إسمين لفئة واحدة وفي هذه الحالة تكتب :

$S=V$ وبصفة عامة تكون مجموعتان $S=V$. V متساويتان إذا كان لهما العناصر نفسها أي أن

$S=V \longleftrightarrow$ (للمجموعتين S ، V العناصر نفسها) .

ويمكن تعريف تساوي مجموعتيو باستخدام مفهوم الانتماء كما يلي :

تعريف : تكون مجموعتان S ، V متساويتين إذا كان كل عنصر من S ينتمي إلى V وكل عنصر من V تنتمي إلى S .

مثال : $S = [\text{أسود} ، \text{أبيض} ، \text{أحمر}]$ ، V هي فئة الألوان الرئيسية في علم ج . م . ع . فإن $S=V$.

المجموعة الجزئية والاحتواء :

إذا كانت S مجموعة طلاب معهد الرياض العلمي و V مجموعة طلاب ثانئة ثانوي فإن جميع عناصر المجموعة V ليست سوى بعض عناصر المجموعة S ويقال أن :

مجموعة V محتواة في S إذا كان كل عنصر من V عنصر في S وتكتب $V \subset S$ وقرأ V فئة جزئية Subset من S .

إذا كانت V ليست فئة جزئية من S فإننا نعبر عن ذلك $V \not\subset S$

وهذا يعني أن هناك عنصراً واحداً على الأقل في S ولا تنتمي إلى S .
ويقال للمجموعة S أنها مجموعة جزئية فعلية Proper Set من S إذا كانت $S \subset S$. $S \neq S$.

ويقال في هذه الحالة أن S محتواه تماماً في S .

وهكذا نرى أنه لا يمكننا إستعمال الرمز $S \subset S$ ما لم نتأكد من أمرين :

١ - كل عنصر من S هو عنصر في S .

٢ - يوجد في S عنصر على الأقل لا تنتمي إلى S .

مثال : إذا كانت S مجموعة مدن المملكة العربية السعودية ، S مجموعة المدن العربية فإن :

$S \subset S$ ، $S \neq S$ يمكن كتابة $S \subset S$

إذا كان لدينا مجموعتان S و S وكان في S عنصر واحد على الأقل لا ينتمي إلى S فإن $S \subset S$ لا تكون محتواه في S ويمكن القول أن المجموعة الخالية \emptyset مجموعة جزئية من أي مجموعة S .

فتساوي مجموعتان S و S إذا كانت $S \subset S$ محتواه في S وكانت S محتواه في S :

$S = S \iff (S \subset S \text{ و } S \subset S)$.

المجموعة الشاملة : Universal Set

كل مجموعة تهمنها عناصرها أو أجزاؤها أثناء دراستنا تسمى المجموعة الشاملة مثال ذلك مجموعة الأعداد الطبيعية ط هي المجموعة الكلية التي ندرس من خلالها مبادئ الحساب في المرحلة الابتدائية .

(العمليات على المجموعات)

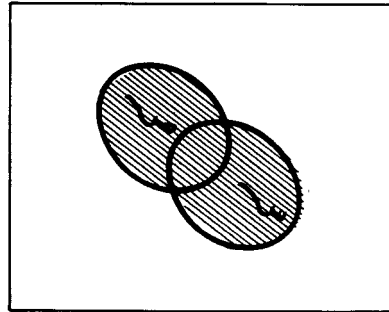
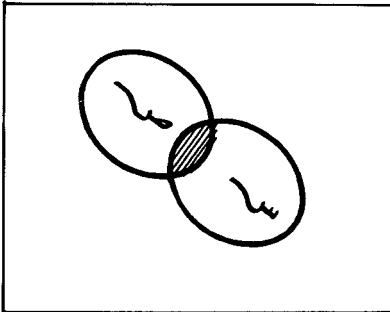
الاتحاد والتقاطع : Union and Intersccbion

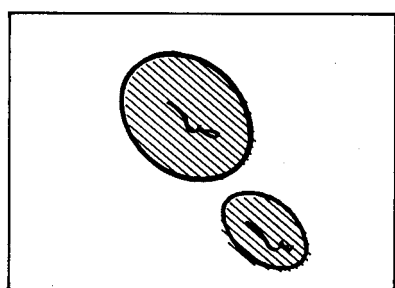
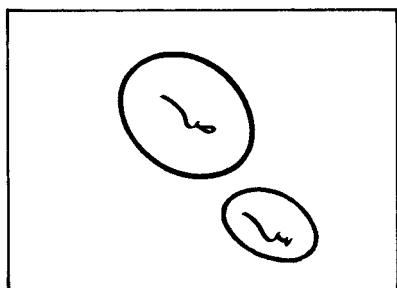
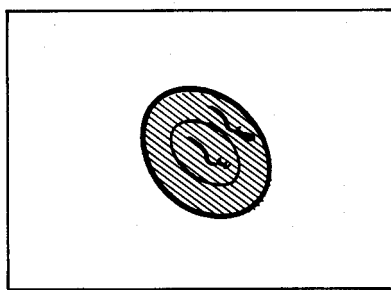
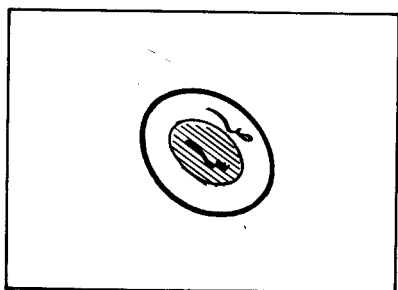
إذا كانت S و V مجموعتين فإن المجموعة التي تتكون من جميع العناصر التي تنتمي إلى إحدى الفئتين على الأقل تسمى إتحاد الفئتين $S \cup V$ ويرمز لها بالرمز $S \cup V$ وتقرأ S اتحاد V .

أما الفئة التي تتكون من العناصر المشتركة فقط بين الفئتين S و V فتمثل تقاطع الفئتين ويرمز لها بالرمز $S \cap V$ وتقرأ $S \cap V$ ويمكن إستخدام أشكال فن لتوضيح ذلك .

$S \cup V$

$S \cap V$





ويقال لفتتين S و T إنهما متباعدتان إذا كان $S \cap T = \emptyset$.

خواص عملية الاتحاد :

وتدعى خاصية اللا نمو .

$$S \cup U = U$$

وتدعى خاصية العنصر الحيادي

$$S \cup \emptyset = S$$

وتدعى الخاصية التبديلية .

$$S \cup T = T \cup S$$

خواص عملية التقاطع :

خاصة اللا نمو .

$$S \cap U = S$$

الخاصة التبديلية .

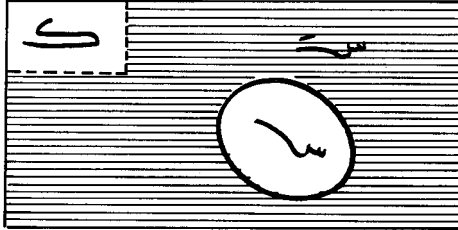
$$S \cap T = T \cap S$$

$$S \cap \emptyset = \emptyset$$

عملية الإتمام :

مما سبق نلاحظ أن عمليتي الاتحاد والتقاطع تهدف إلى تشكيل مجموعة جديدة من مجموعتين معلومتين ويقال عن مثل هاتين العمليتين عملية ثنائية Binary Operation إلا أن هناك عملية أساسية أحادية يتم بواسطتها تشكيل مجموعة جديدة من مجموعة معلومة وتسمى هذه العملية عملية الإتمام .

لغرض أن K مجموعة تمثل طلاب معهد الرياض العلمي في السنوات المختلفة ، S تمثل مجموعة الطلاب في الشهادتين الكفاءة والثانوية فبقية الطلاب تمثل مجموعة الطلاب ما عدا الشهادتين وتشكيل مجموعة جزئية من K تسمى المجموعة المتممة للمجموعة S وتكتب مكملتها S^c ويلاحظ أن كل عنصر من متممه S^c لا ينتمي إلى S .



خواص عملية الإتمام .

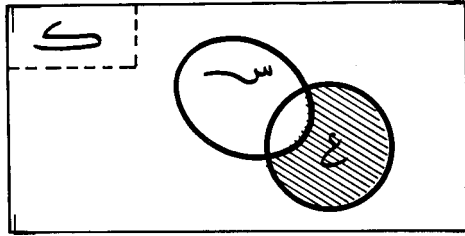
$$(S^c)^c = S \quad S \cap S^c = \emptyset, \quad S \cup S^c = K$$

الفرق بين مجموعتين :

إذا كانت K مجموعة طلاب السنة النهائية في معهد الرياض العلمي .
 $S = \{ \text{س : طالب عضو في جمعية القرآن الكريم} \}$.
 $E = \{ \text{س : طالب عضو في جمعية الرياضيات} \}$.

فالمجموعة المكونة من طلاب أعضاء جمعية القرآن الكريم وليسوا أعضاء

في جمعية الرياضيات تسمى الفرق بين المجموعتين ويمكن تمثيلها كما يلي .



خواص عملية الفرق :

$$\phi = \text{ك} - \text{س}$$

$$\phi = \text{س} - \text{س}$$

$$\text{س} - \text{ع} \neq \text{ع} - \text{س}$$

$$\text{س} - \text{ع} = \text{س} \cap \text{ع}$$

جبر المجموعات :

(١) خاصية التبديل :

$$\text{س} \cup \text{ع} = \text{ع} \cup \text{س} , \text{س} \cap \text{ع} = \text{ع} \cap \text{س} .$$

(٢) خاصية التوزيع :

$$\text{س} \cup (\text{ع} \cap \text{ص}) = (\text{س} \cup \text{ع}) \cap \text{ص}$$

$$\text{س} \cap (\text{ع} \cup \text{ص}) = (\text{س} \cap \text{ع}) \cup \text{ص}$$

خاصية دي مورجان :

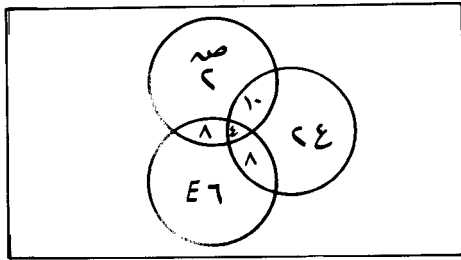
$$(\text{س} \cup \text{ع})^c = \text{س}^c \cap \text{ع}^c$$

$$(\text{س} \cap \text{ع})^c = \text{س}^c \cup \text{ع}^c$$

وبعد عزيزي القارئ لا أدعي إن ما قدمته إليك شيء كامل فالكمال لله وحده سبحانه وتعالى ولكن لعلّي سهلت الأمر بعض الشيء داعياً إياك إلى تناول أكثر من كتاب موجود في المكتبة العربية والآن ما رأيك في أن نحل هذا التمرين معاً .

تدريب : في معهد الرياض العلمي عدد طلاب جمعيات النشاط ٤٠ طالب عدد المشتركين في جمعية الرياضيات ٢٤ وعدد المشتركين في جمعية العلوم ٢٤ وعدد الطلاب المشتركين في الجمعيات الثلاث ٤ وعدد المشتركين في الرياضيات والعلوم معاً ١٤ وعدد المشتركين في الرياضيات واللغة الإنجليزية معاً غير مشتركين في العلوم ٨ وعدد المشتركين في العلوم والإنجليزية معاً وغير مشتركين في الرياضيات ٨ أو جد عدد المشتركين في كل جمعية على حده .

يمكن الحل باستخدام مخططات فين كما يأتي :



سنرمز للرياضيات بالرمز ص والعلوم بالرمز ع والإنجليزي بالرمز E واضح من الحل أن عدد المشتركين في جمعية الرياضيات فقط ٢ وجمعية العلوم فقط ٢ وجمعية الإنجليزي فقط ٦ .

والآن عزيزي القارئ ما رأيك في أن نحاول حل هذا التمرين بمفردك .

في مدرسة ما يوجد ٥٠ طالباً يدرسون رياضيات ولغة أجنبية معاً

وأنه يوجد ٨٠ طالباً يدرسون رياضيات فقط وأن ٧٠ طالباً يدرسون لغة
أجنبية فقط فكم عدد طلاب المدرسة ؟ . (٢٠٠)

وبعد لعلنا نكون قد طرقنا معاً ذلك الباب المؤدي إلى تكنولوجيا هذا
العصر وأن تكون قد بدأنا الخطوه الأولى في هذه الرحلة الطويله رحلة
الألف ميل التي تبدأ بخطوة ، خطوة جادة داعياً الله سبحانه وتعالى إلى
توفيق الجميع .

مجدي ممدوح عزت
معهد الرياض العلمي

الصمت

لا خير في حشو الكلا
م اذا اهتديت الى عيونه
والصمت أجمل بالفتى
من منطلق في غير حينه
وعلى الفتى لطباعه
سمة تلوح على جبينه

قال شاعر آخر :

لا تنكري يا عز اذا ذل الفتى
ذو الأصل واستولى لئيم المحتد
ان البزاة رؤوسهن عواطل
والتاج معقود برأس الهدهد